

О ГЕТЕРОПАРАМЕТРИЧЕСКОМ ВОЗБУЖДЕНИИ

В. А. Лазирев

Произведено экспериментальное исследование гетеропараметрического возбуждения помощью механического периодического изменения самоиндукции колебательной системы на модели параметрического генератора переменного тока, построенной по принципу Л. Мандельштама и Н. Папалекси.

Обследовано влияние различных факторов (логарифмический декремент затухания, глубина модуляции самоиндукции, потери и время релаксации диска) на условия возбуждения и величину стационарной амплитуды.

Обнаружено существование двух различных режимов стационарной амплитуды, что находится в согласии с теорией, развитой Л. Мандельштамом и Н. Папалекси, которая подтверждается как качественно, так и количественно (в пределах точности наблюдений), описываемыми здесь экспериментальными результатами.

Настоящая работа представляет собой экспериментальное исследование явлений, имеющих место при возбуждении колебаний посредством периодического изменения самоиндукции колебательной системы (гетеропараметрическое возбуждение) и качественную проверку теории, данной Л. И. Мандельштамом и Н. Д. Папалекси.

Прежде чем приступить к изложению полученного опытного материала, представляется целесообразным кратко сопоставить вместе главные результаты теории, развитой вышеназванными авторами, а также указать на те предпосылки, которые положены в ее основание.

Как показали Л. И. Мандельштам и Н. Д. Папалекси,¹ можно в электрической колебательной системе, в которой отсутствуют специальные источники электрических или магнитных полей, возбудить и длительно поддерживать электрические колебания посредством периодического (электрического или механического) изменения самоиндукции или емкости системы. Основными условиями для такого возбуждения, получившего название гетеропараметрического возбуждения, при этом являются следующие.

а) Необходимо производить изменение параметра с частотой приблизительно в два раза большей средней собственной частоты системы.

б) Необходимо соблюдение такого соотношения между величиной изменения параметра, обуславливающей величину вкладываемой в систему извне мощности, и величиной среднего собственного логарифмического декремента затухания, чтобы вкладываемая в систему мощность превышала потери в ней.

¹ Л. И. Мандельштам и Н. Д. Папалекси. См. выше.

Более точная формулировка этих условий получается при рассмотрении так называемых неустойчивых решений линейного дифференциального уравнения с периодическими коэффициентами, к которому приводит теория колебательного состояния системы. Рассматривая изменение самоиндукции по закону

$$L = L_0 (1 + m \sin 2\omega t), \quad (1)$$

что приводит к следующему дифференциальному уравнению

$$L_0 \frac{d}{dt} i (1 + m \sin 2\omega t) + Ri + \frac{1}{C} \int i dt = 0, \quad (2)$$

можно эти условия более точно сформулировать следующим образом:

$$m > \frac{2}{\pi} \delta, \quad (3)$$

$$1 + \sqrt{\frac{m^2 - \delta^2}{4 - \pi^2}} \geq \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \geq 1 - \sqrt{\frac{m^2 - \delta^2}{4 - \pi^2}}. \quad (4)$$

Здесь $\delta = \frac{\pi R}{L_0 \omega}$ есть „средний“ логарифмический декремент собственных колебаний системы, 2ω — частота изменения параметра, $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_0 C}}$ — „средняя“ собственная частота системы, а $m = \frac{L_{\max} - L_{\min}}{L_{\max} + L_{\min}}$ (или $m = \frac{C_{\max} - C_{\min}}{C_{\max} + C_{\min}}$) — относительная величина изменения параметра, так называемая „глубина модуляции“ параметра.

Условие (4) может быть переписано в несколько иной форме, если ввести „расстройку“

$$\xi = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\omega^2}, \quad (5)$$

а именно:

$$\sqrt{\frac{m^2 - \delta^2}{4 - \pi^2}} \geq \xi \geq -\sqrt{\frac{m^2 - \delta^2}{4 - \pi^2}}. \quad (6)$$

Таким образом величина области гетеропараметрического возбуждения, выраженная через ξ , равняется:

$$\xi_1 - \xi_2 = \frac{\omega_{20}^2 - \omega_{10}^2}{\omega^2} = 2 \sqrt{\frac{m^2 - \delta^2}{4 - \pi^2}}. \quad (7)$$

Зависимости 3, 6 и 7 дают достаточную характеристику возникновения колебаний. Следует также заметить, что в самом начале этого процесса амплитуда колебаний нарастает приблизительно по закону

$$e^{\frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{m^2 - \xi^2}{4 - \pi^2}} \right) \omega t}. \quad (8)$$

Для получения величины стационарной амплитуды необходимо учесть влияние факторов, ограничивающих беспредельное возрастание амплитуды, без введения в систему которых такая амплитуда невозможна. Такими факторами являются например зависящее от величины тока сопротивление включенных в цепь системы ламп накаливания, или, как это главным образом и имело место в настоя-

щем исследовании, нелинейная зависимость между намагничивающим током и магнитной индукцией в железе сердечников катушек самоиндукции. При учете этих факторов математическая задача нахождения стационарной амплитуды приводится к решению нелинейных дифференциальных уравнений. В указанных выше теоретических исследованиях дано приближенное решение этой задачи для ряда простых случаев, например для случая, когда зависимость между током и магнитным потоком выражается либо кубической параболой

$$\Phi_2 = \alpha i + \gamma i^3 \quad (9_1)$$

либо аркустангенсоидой ¹

$$\Phi_2 = \gamma \operatorname{arctg} ki + \alpha i. \quad (10_1)$$

Так как при этом предполагается, что внешнему периодическому изменению подвергается лишь линейная часть самоиндукции, то дифференциальное уравнение системы имеет вид:

$$\frac{d\Phi}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int i dt = 0, \quad (11)$$

где

$$\Phi = L_0 (1 + m \sin 2\omega t) i + \gamma i^3 \quad (9_2)$$

или

$$\Phi = L_0 (1 + m \sin 2\omega t) i + \gamma \operatorname{arctg} ki - \gamma ki. \quad (10_2)$$

Для квадрата амплитуды X^2 напряжения на конденсаторе получаются следующие приближенные значения.

В первом случае

либо

$$\frac{3}{4} \mu X^2 = \xi + \sqrt{\frac{m^2}{4} - \frac{\delta^2}{\pi^2}} \quad \text{при } \gamma < 0 \quad (12_1)$$

где

$$\frac{3}{4} \mu X^2 = -\xi + \sqrt{\frac{m^2}{4} - \frac{\delta^2}{\pi^2}} \quad \text{при } \gamma > 0 \quad (12_2)$$

$$\left(\mu = \frac{\gamma \omega^2}{L_0} \right).$$

Во втором случае

$$X^2 = \frac{8g}{k^2} \cdot \frac{2\xi + \sqrt{m^2 - 4\delta^2}}{[2(y - \xi) - \sqrt{m^2 - 4\delta^2}]^2}, \quad (13)$$

где

$$g = \frac{k\gamma}{L_0}.$$

Исследование устойчивости этих решений показало, что они устойчивы для всех значений ξ , начиная от

$$\xi \geq -\sqrt{\frac{m^2}{4} - \frac{\delta^2}{\pi^2}} \quad \left(\text{или } \xi \leq \sqrt{\frac{m^2}{4} - \frac{\delta^2}{\pi^2}} \right), \quad (14)$$

до той величины ξ , для которой остаются в силе сделанные предположения относительно порядка малости m , δ и μ . В частности воз-

¹ См. работу В. П. Гуляева и В. В. Мигулина, помещаемую в этом выпуске.

можны устойчивые значения и при $\xi \geq \sqrt{\frac{m^2}{4} - \frac{\delta^2}{\pi^2}}$, т. е. (ф-ла 6) за пределами области возбуждения. Иными словами здесь возможны явления затягивания (частотный гистерезис).

Приведенные ниже исследования гетеропараметрического возбуждения основываются на своеобразном способе изменения действующей самоиндукции колебательной системы, предложенном Л. И. Мандельштамом и Н. Д. Папалекси и заключающемся в периодическом введении в поле катушек самоиндукции колебательной системы проводящих масс (зубцов ротора). Изменение самоиндукции здесь происходит за счет изменения магнитной энергии системы магнитным полем токов Фуко, наводимых в движущихся проводящих массах.

От рассмотренных выше идеализированных схем колебательной системы с переменной самоиндукцией этот случай отличается тем, что здесь, в сущности, изменяется не самоиндукция системы непосредственно, а взаимоиндукция системы с металлическими массами, которые можно в известном смысле уподобить некоторому короткозамкнутому витку (кольцу), самоиндукция и сопротивление которого, однако, не остаются неизменными при движении, а одновременно с взаимоиндукцией „модулируются“. Так как, с одной стороны, более строгая теория этого случая, представляющая ряд больших трудностей, еще не разработана, и так как, с другой стороны, в первом приближении можно рассмотрение этого случая свести к случаю периодического изменения самоиндукции, то мы в дальнейшем будем исходить из приведенных выше формул.

Описание установки

Для проведения опытов по гетеропараметрическому возбуждению нами была осуществлена опытная установка, в которой параметр L изменялся внешней механической силой. Для этого была построена своеобразная машина для возбуждения гетеропараметрических колебаний. Корпус статора машины был сделан из сухой карельской березы и состоял из двух половин с зазором в 6 мм между ними. По окружности диаметром 30 см в этот корпус вделаны 8 катушек, расположенных на одинаковых расстояниях друг от друга и соединенных между собою последовательно. Катушки самоиндукции по 125 витков каждая, диаметром проволоки в 1,56 мм одеты на специальные сердечники из подразделенного железа.

На рис. 1 и 2 даны статор в собранном виде и отдельно катушка. В статорном зазоре шириною 6 мм помещен дюралюминиевый диск диаметром 30 см и толщиной 3 мм, на периферии которого вырезаны 8 зубцов (по числу катушек), расположенных на одинаковых расстояниях. Размеры зубцов определялись сечением катушек. Длина их была 5 см, ширина 4 см. На рис. 3 показан диск отдельно. Следовательно зубцы были сделаны с таким расчетом, чтобы они могли помещаться целиком в поле катушек (положение „против“), или же вне поля их (положение „между“). Рис. 4 показывает вид машины без верхней части статора. На рис. 5 дан общий вид машины с приводной частью. Вся система приводилась в движение мотором 3-фазного тока типа „И“ завода „Электросила“

¹ Ср. Л. Мандельштам и Н. Папалекси *loc. cit.* стр. 5.

на 220/127 V мощностью 4,5 kw, 1430 об/мин. На оси мотора насажен маховик весом в 30 кг. Мотор был связан с диском машины через 10-кратный редуктор так, что число оборотов диска доходило до 14 300 об/мин.

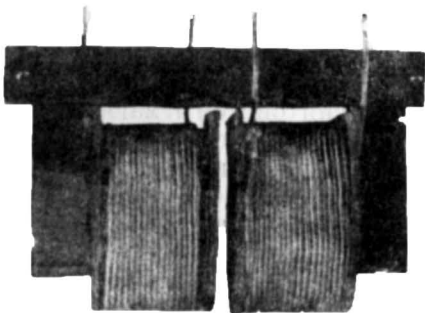


Рис. 1.

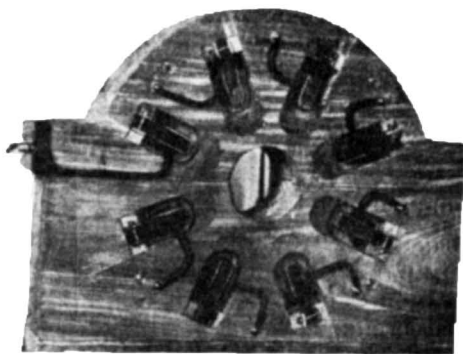


Рис. 2.

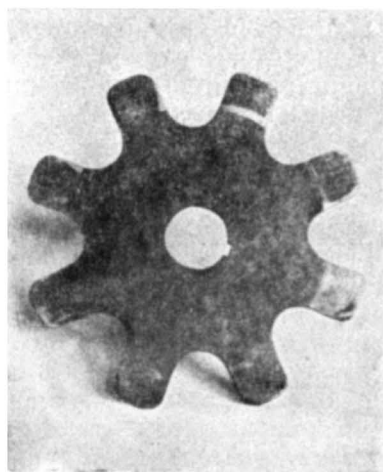


Рис. 3.

Для оси диска были отлиты специальные бабитовые подшипники, смазка же подавалась под давлением.¹

При вращении диска взаимная индукция между зубцами, играющими роль коротко-замкнутых витков, и катушками статора меняется, а следовательно меняется и приведенная самоиндукция системы. Когда зубцы находятся против катушек, самоиндукция их — минимум, и, наоборот, когда зубцы находятся между катушками,



Рис. 4.

¹ Следует отметить существенное участие в разработке этой лабораторной установки механика-конструктора нашей лаборатории М. И. Рзянкина.

самоиндукция последних максимум. Таким образом при вращении диска с числом оборотов $N = 14\,300$ в минуту самоиндукция статора периодически меняется с частотой $n = \frac{8N}{60} = 1900$ герц (около). Следова-

тельно, настроив контур на среднюю частоту 950 герц и выполнив энергетическое условие, мы возбуждали колебания с частотой 950 герц. Причем мощность возбужденных колебаний в контуре по желанию могла меняться и достигала 4 kW.

Проверка условий возбуждения

Прежде всего были исследованы условия возникновения колебаний при гетеропараметрическом возбуждении. Эти условия даны формулами 3, 6, 7 и 8.

Для проверки соотношения (3) в вышеописанной установке измерялась глубина модуляции m и декремент затухания системы. Все измерения производились на частоте 950 герц мостиком Витстона. Для измерения самоиндукции в качестве плеч моста пользовались магазином сопротивлений Гартман и Браун на 100 000 ом и эталоном самоиндукции Сименс и Гальске на 0,1 генри. Собственная частота контура определялась также на соответствующем мостике. В этом случае измеряемое плечо представляло собою резонансный контур, а три остальные — омические сопротивления. В момент резонанса контура мост может быть сбалансирован чисто омическим сопротивлением. Потери в контуре измерялись одновременно при измерении самоиндукции и емкости введением дополнительного эталонного сопротивления в мост. Общие потери контура складывались из двух частей: R_C -ваттные потери в емкости и R_L -ваттные потери в самоиндукции. Ваттные потери в самоиндукции представляют собою сумму потерь в обмотке, в железе и диске. Здесь необходимо особо остановиться на вопросе о происхождении потерь в диске. Роль диска заключается в том, чтобы вкладывать в систему энергию. Токи Фуко в зубцах диска, взаимодействуя с токами в катушках, выталкивают зубец из поля катушек. Иначе говоря, положение зубца „между“ катушками устойчивое и „против“ катушек — неустойчивое. Следовательно в первом положении система обладает минимумом энергии, во втором — максимумом. При переходе из первого положения (положение „между катушками“) во второе мы должны затратить работу E_1 . И обратно, при переходе из неустойчивого равновесия в устойчивое система будет возвращать энергию E_2 . Общее количество энергии при переходе системы из первого устойчивого равновесия во второе будет равно

$$\Delta E = E_1 - E_2 > 0.$$

(15)

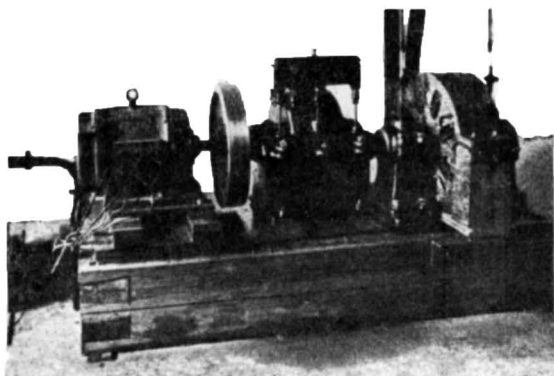


Рис. 5.

Соотношение (15) выполняется за счет установления соответствующего фазного сдвига между током в катушках и положением диска в пространстве.

С другой стороны диск, как составная часть всей колебательной системы, не должен вносить в нее больших потерь, в противном случае не будет удовлетворено условие самовозбуждения (3). Иначе говоря, время релаксации в диске должно быть не меньше определенной величины. Это требование сводится к тому, чтобы токи Фуко, наведенные в диске, не могли затухнуть в течение времени, требующегося для перехода зубца от данной катушки до ближайшей соседней. Иначе было бы трудно себе представить процесс нарастания. Диск должен быть переносчиком тока от одной катушки к другой и таким образом индуктировать в катушках дополнительные импульсы, которые и являются причиной дальнейшего нарастания колебаний. Тот факт, что эти добавочные импульсы, наведенные диском в катушках, должны находиться в фазе с существующими уже токами в катушках, требует, чтобы частота контура была в определенном соотношении с частотой модуляции самоиндукции; особенно эффективно соотношение частот 1:2.

Для того, чтобы выяснить, в какой мере выполняется требование, предъявляемое к диску в отношении времени релаксации, необходимо было измерить его экспериментально. Однако произвести такое измерение над зубчатым диском, вследствие необходимости специальной синхронизации импульсов, оказалось затруднительным, и мы ограничились только опытами с сплошными дисками.

Определение времени релаксации в сплошных дисках

Нами были произведены измерения времени релаксации в сплошном дюралюминиевом вращающемся диске. Опыт был поставлен следующим образом.

В вышеописанной параметрической машине вместо диска с зубцами был поставлен сплошной диск такого же диаметра из дюралюминия, толщиной в 3 мм. 8 катушек статора, которые отдельно можно видеть на рис. 2, разъединялись между собою. В межполюсном пространстве катушек теперь уже вращался сплошной диск. В одну из катушек А (рис. 6) подавались через большой промежуток времени (через одну-две минуты) идентичные импульсы постоянного тока.

Величина импульса подбиралась такой, чтобы при подаче последнего в катушку А при неподвижном диске баллистический гальванометр Г, находящийся в цепи ближайшей соседней катушки (у нас был включен милливольтметр фирмы Прен на 17 mV с собственным периодом в 2 сек. и внутренним сопротивлением 325 ом), питаемый через детектор Р, не давал отброса. Идентичности же импульса можно было легко достигнуть, пользуясь током замыкания цепи катушки А. Разница в отбросах гальванометра при повторных замыканиях не превосходила 0,5 деления. Максимальный же ток за-

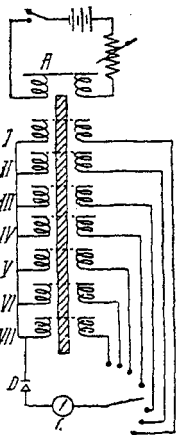


Рис. 6. Схема опыта для определения времени релаксации в сплошном вращающемся диске.

мыкания в катушке А был порядка нескольких десятков мА. Для более устойчивой работы детектора последний был поставлен на каменную плитку, привязанную тонкой нипельной резиной к подставке. Таким образом механический период детектора был сделан очень большим по сравнению с периодом паразитных механических колебаний, вызываемых вращением ротора.

Ток, наведенный в диске, индуктировал в катушках э. д. с., величина которой после выпрямления детектором регистрировалась по баллистическому отбросу гальванометра Г. Гальванометр по очереди подключался к различным катушкам, начиная от I до VII включительно, и для каждой катушки отдельно производился отсчет баллистического отброса. Следовательно для каждой катушки, начиная от I до VII, по очереди замкнутой на детектор с гальванометром Г, подавался в катушку А отдельный импульс. Произведя несколько раз всю серию измерений, мы получили среднее значение отброса для каждой катушки в отдельности. Результаты измерений приведены на табл. 1. На рис. 7 представлен график затухания тока в диске во времени, причем время пробега точки от одной катушки до другой в нашем опыте

Таблица 1

$t \times 10^{-4}$ сек.	Эск- пер.	Гео- рет.	
I	0,0	—	34,40
II	5,2	22	22,30
III	10,4	14,5	14,20
IV	15,6	9,0	9,10
V	20,8	6,4	5,80
VI	26,0	4,0	3,73
VII	31,2	2,5	2,40
VIII	36,4	1,5	1,54
IX	41,6	—	0,90

равнялось $5,2 \cdot 10^{-4}$ сек. Эта кривая совпадает с экспоненциальной кривой, причем время релаксации равняется $t = 11,7 \cdot 10^{-4}$ сек. Значение ординаты, соответствующее нулевой абсциссе, вычислено по формуле $I = I_0 e^{-855 t}$. Из кривой видно, что при совершении одного оборота диском ток падает до 2,5% первоначальной величины. В третьем столбце табл. 1 приведены вычисленные значения функции.

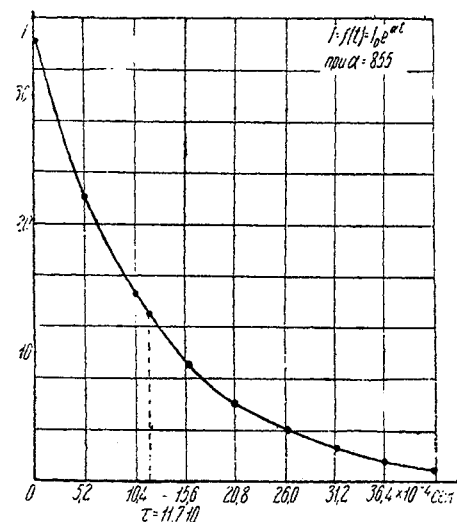


Рис. 7. Кривая спада магнитного поля во вращающемся диске.

Прежде чем привести результаты сравнения ф-лы (3) с опытом, необходимо остановиться еще на одном явлении, влияющем на глубину модуляции, а следовательно и на условие самовозбуждения: это смещение токов Фуко в движущихся проводящих средах. Дело заключается в следующем.

Пусть некоторое переменное поле с площадью поперечного сечения S индуктирует в неподвижном проводнике электрический ток. Топография наведенного тока в металле будет такова, что он охватит магнитное поле, проникающее в металл. В результате установится между „электрическим витком“ и катушкой самоиндукции, задающей первичное поле, не-

которая взаимная индукция, которая и определит реакцию сплошного проводника на катушку, т. е. на ее самоиндукцию и активное сопротивление. Спрашивается, останется ли реакция сплошного проводника на катушку та же самая, если этот проводник привести в поступательное или вращательное движение, т. е. будет ли занимать электрический виток то же самое положение относительно катушки, или же он сместится в сторону движения проводника. Если смещение существует, тогда взаимная индукция должна уменьшиться, самоиндукция катушки увеличиться, а активное сопротивление уменьшиться. Для опытной проверки этого явления мы пользовались той же самой установкой, что и при описанных выше опытах.

Статор машины включался в мост Витстона. Ток в мосте при неподвижном диске компенсировался, затем диск приводили в движение. Уже при незначительных оборотах компенсация нарушалась. На приведенной табл. 2 даны результаты измерений. Из таблицы

Таблица 2

Состояние диска	L статора	ΔL	$\frac{\Delta L}{L} 100$
Неподвижн.	0,0242	0,0008	3,2%
Подвижн.	0,0250		
Неподвижн.	0,0242	0,0008	3,2%
Подвижн.	0,0250		
Неподвижн.	0,02425	0,00075	3,1%
Подвижн.	0,0250		
Неподвижн.	0,0253	Средн. значен. 3,1±0,1%	

мы видим, что смещение тока в диске по отношению к катушке существует, но незначительное, не превышая 3%, поэтому в дальнейшем мы эту поправку принимать во внимание не будем.

Измерение глубины модуляции самоиндукции

Для получения картины изменения самоиндукции системы во времени была измерена зависимость реакции диска на самоиндукцию статора от положения диска. При этом получились кривые, представленные на рис. 8. Здесь кривая I дает изменение самоиндукции статора от угла поворота диска. Кривая II представляет ход изменения потерь в статоре от того же аргумента.

Минимум R соответствует положению зубца между катушками (положение А). Вместо одного максимума, которого естественно было ожидать при положении зубца против катушки (положение В) кривая имеет два максимума, расположенные по обе стороны от положения (В).

Как показали специальные исследования, произведенные Н. Ф. Алексеевым, появление этих максимумов обязано своим происхождением своеобразному „краевому эффекту“. Краевой эф-

факт состоит в том, что токи Фуко, наведенные в сплошных проводниках, располагаются в них таким образом, что всегда охватывают индуктируемое их поле. Поэтому, когда зубец диска каким-либо краем вступает в магнитное поле, то наведенные токи „обязаны“ расположиться по этому краю, независимо от величины зубца. И все сопротивление наведенному току будет главным образом сосредоточено у этого края.

По мере удаления поля от края сопротивление зубца будет уменьшаться. Так как форма наведенного тока с изменением положения зубца будет меняться, то, очевидно, будет меняться и самоиндукция зубца.

Таким образом мы будем иметь систему, состоящую из первичной и вторичной обмотки, с переменным коэффициентом связи, причем самоиндукция и сопротивление вторичной обмотки зависят от величины связи. Так как потери, вносимые зубцом в статорную обмотку, увеличиваются с увеличением коэффициента связи и определяются в приведенных эквивалентных величинах формулой

$$R = \frac{M^2 \omega^2 R_1}{Z^2}, \quad (16)$$

где R — вносимые потери, M — „взаимная индукция“ между катушкой и зубцом, Z — „импеданс“ зубца, а R_1 — ваттное сопротивление зубца, то при „вхождении“ зубца в поле потери растут очень быстро, так как

вместе с ростом M мы имеем большое сопротивление R_1 . По мере дальнейшего вхождения зубца в поле рост M , приближаясь к максимуму, будет замедляться, а сопротивление R_1 будет уменьшаться. Поэтому вносимые потери будут падать. При выходе зубца из поля картина повторится. Мы не будем больше останавливаться на целом ряде и других очень интересных явлений, происходящих в сплошных проводниках, так как этим вопросам будет посвящена специальная статья, а ограничимся только теми из них, без учета которых нельзя полно описать явление гетеропараметрического возбуждения в нашем случае.

Ниже мы приводим результаты измерений (см. табл. 3).

Глубина модуляции m определялась, как

$$m = \frac{A_1}{T} \int_0^T L(t) dt \quad (17)$$

Здесь A_1 — амплитуда гармоники, соответствующей частоте модуляции в разложении в ряд Фурье выражения для самоиндукции $L(t)$ — период модуляции и $L(t)$ — кривая самоиндукции, пред-

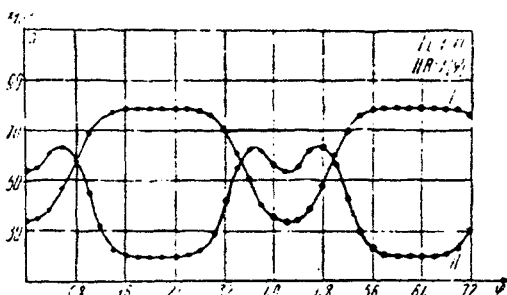


Рис. 8. Зависимость изменения самоиндукции (L) и сопротивления (R) системы от положения диска.

Таблица 3

	m	δ	$\frac{2}{\pi} \delta$
I	0,144	0,23	0,146
II	0,35	0,57	0,365
III	0,384	0,595	0,375

ставленная на рис. 8. Потери в статоре определены, как

$$R_0 = \frac{1}{T} \int_0^T R(t) dt, \quad (18)$$

где $R(t)$ — зависимость потерь от угла поворота диска, т. е. от времени. Разложение в ряд $L(t)$ дает следующее выражение:

$$L(t) = 0,0623 + 24 \sin(\omega t - 86^\circ) - 7,16 \sin(2\omega t - 67^\circ) - \\ - 1,17 \sin(3\omega t + 67^\circ) + 1,17 \cos 4\omega t + 0,5 \cos 5\omega t.$$

В табл. 3 приведены значения для m , $\delta_{\max}$ и $\frac{2}{\pi} \delta_{\max}$ для трех случаев.

Из этой таблицы легко видеть, что основное условие (3) возбуждения гетеропараметрических колебаний всегда выполнено. Некоторое расхождение между соответствующими значениями 1 и 3 столбцов объясняются тем, что нами не учтено, как уже было отмечено, влияние движения диска.

Нарастание колебаний

Нарастание колебаний при гетеропараметрическом возбуждении имеет значительно более сложный характер, чем в обыкновенной линейной системе (с постоянными параметрами). Пользуясь приближенными методами, указанными Л. П. Мандельштамом и

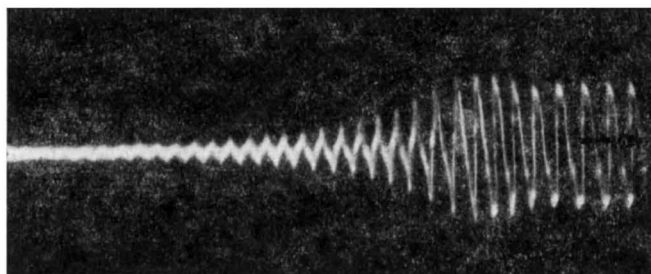


Рис. 9. Оциллограмма нарастания тока (I) при гетеропараметрическом возбуждении. $\delta = 0,288$.

Н. Д. Папалекси,¹ можно привести задачу к системе двух нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка, не содержащих явно времени. Это обстоятельство представляет большие выгоды, так как позволяет применить методы Пуанкаре для исследования свойств интегральных кривых на фазовой плоскости.

Поступая таким образом, В. П. Гуляев и В. В. Мигулин² проанализировали качественно характер нарастания колебаний при гетеропараметрическом возбуждении.

Мы поставили себе задачей экспериментально подойти к выясне-

¹ loc. cit.

² В. П. Гуляев и В. В. Мигулин, loc. cit.

нию основных черт процесса нарастания, а также и спадания колебаний. С этой целью нами произведена фотографическая запись для разных декрементов δ и $m = \text{const}$. Из осциллограмм рис. 9 и 10 легко видеть, что быстрота нарастания увеличивается с увеличением разности

$$\frac{\pi}{2} m - \delta = \varepsilon, \quad (19)$$

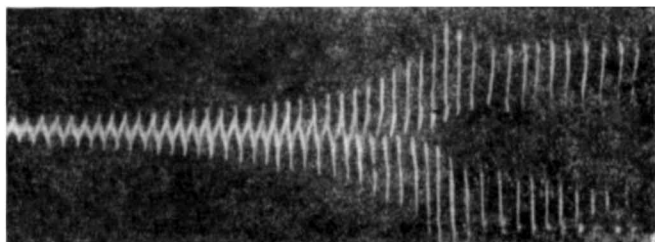


Рис. 10. Осциллограмма нарастания тока (I) при гетеропараметрическом возбуждении. $\delta = 0,415$.

характеризующей, как указано выше (ф-ла 8), начальный процесс нарастания при $\xi = 0$. Здесь ε — инкремент нарастания системы.

Огибающая нарастания показывает, что наш контур уже при незначительных токах представляет собою нелинейную систему. Полное время нарастания, показанное на осциллограмме рис. 10 почти вдвое больше, чем то же самое время на осциллограмме рис. 9. Инкремент в первом случае $\varepsilon_1 = 0,11$; во втором случае $\varepsilon_2 = 0,201$.

Здесь, конечно, имеет смысл говорить об инкременте только в момент возбуждения, так как при дальнейшем нарастании колебаний он меняет свою величину.

Запись нарастаний производилась осциллографическим шлейфом на неподвижную фотопластинку. Колебания разворачивались одним зеркалом, укрепленным на ось мотора постоянного тока.

Собственная частота шлейфа 12 000 периодов, максимальный ток 100 мА. При дуговом источнике света такая установка позволяет регистрировать без особого труда единичные процессы длительностью в 10^{-4} сек. при скорости развертки 150 м/сек., т. е. процесс длительностью в 10^{-4} сек. может быть растянут по оси времени на 1,5 см.

На рис. 11 показана внутренность фоторегистрирующего прибора.

Для фотозаписи процессов нарастания и затухания был сделан специальный переключатель, с помощью которого можно было возбуждать систему в тот момент, когда зайчик вступал в область

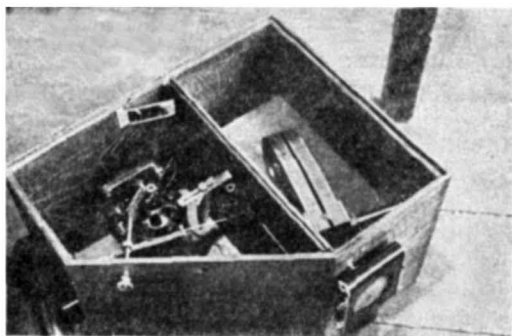


Рис. 11.

чувствительного слоя пластинки, при одновременном срабатывании шторного затвора. Скорость затвора подбиралась такой, чтобы время открытия затвора было не меньше времени прохождения зайчика вдоль всей пластинки и не больше половины периода мотора.

Для проверки правильности определения декремента затухания из измерений средних значений параметров были сняты осциллограммы затухания. На рис. 12 и 13 показаны осциллограммы затухания, соответствующие декрементам затухания 0,414 и 0,555. Вначале обе осциллограммы имеют явно выраженный нелинейный характер, но уже после двух периодов затухания дальнейшее спадание происходит по экспоненциальному закону. На участке экспоненциальной кривой мы непосредственно из осциллограммы определили логарифмические декременты. Из осциллограммы рис. 12 для декремента мы нашли $\delta_1 = 0,400$ вместо 0,414, и из рис. 13 нашли $\delta_2 = 0,600$ вместо 0,555. Этот результат во всяком случае надо

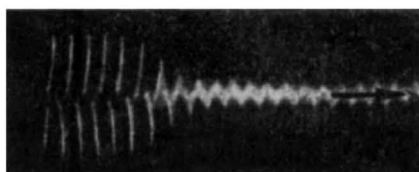


Рис. 12. Осциллограмма затухания тока. $\gamma = 414$.

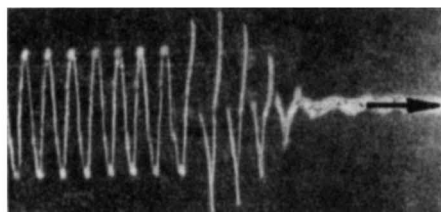


Рис. 13. Осциллограмма затухания тока. $\gamma = 0,555$.

считать удовлетворительным. Большее совпадение получить было трудно, так как определение δ непосредственно из осциллограмм без специальных инструментов не дает достаточной точности.

В заключение отметим, что возбуждение колебаний и прекращение их в контуре производилось соответствующей расстройкой, т. е. приключением или же отключением некоторой емкости. Осциллограммы рис. 12 и 13 были сняты в таких режимах, когда приключением соответствующей емкости колебания срывались. На одной из них (рис. 13) при приключении вносящей расстройку емкости амплитуда первые полтора-два периода возрастает и только потом начинается затухание. На осциллограмме рис. 12 этого явления не наблюдается. Объяснение этого эффекта будет дано в следующем параграфе.

Установление стационарного режима

Наряду с вопросом о возникновении колебаний при гетеропараметрическом возбуждении чрезвычайно важным является и вопрос о стационарной амплитуде. Как было нами указано в введении, для ограничения нарастания амплитуды необходимо наличие в системе нелинейных параметров. В настоящем исследовании такой „нелинейностью“ являлась нелинейная зависимость в самоиндукции, обусловливаемая либо железными сердечниками катушек статора, либо железным сердечником специально вводимого в систему дросселя. Так как этот дроссель был образован трансформатором с двумя обмотками, то в этом последнем случае можно было, пропуская

постоянный ток через другую обмотку, по желанию изменять начальную точку на кривой намагничивания и тем самым менять характер нелинейности (коэффициенты α и γ в ф-лах 9₁ и 10₁).

Так как [ф-лы (12) и (13)] мы одновременно с этим меняем μ и „расстройку“ ξ , то мы, следовательно, можем таким образом изменять величину стационарной амплитуды.

Перейдем к изложению экспериментального материала.

В зависимости от того, определялся ли характер нелинейности системы железом статора или специальным дросселем, мы получили существенно отличные друг от друга два режима. Один режим, когда амплитуда растет с уменьшением собственной частоты контура, другой — наоборот, когда амплитуда растет с увеличением собственной частоты. На рис. 14 и 15 представлены оба случая. По оси абсцисс отложены изменения емкости контура. По оси ординат — эффективные значения амплитуд тока или напряжения. Оба эти случая подтверждаются и теоретически.

Таблица 4

№ кривой	m	δ	$2\xi_0$	$2\xi_m$
19 _I	0,35	0,414	26,3	24,0
19 _{II}	0,35	0,47	22,6	18,5
19	0,386	0,51	31,9	21,8

На табл. 4 представлены сравнительные результаты, измеренные на опыте и вычисленные на основании формулы для максимальной расстройки

$$2\xi = 2 \sqrt{\frac{m^2}{4} - \frac{\delta^2}{\pi^2}},$$

получающейся из ур-ния (4).

На рис. 15 непосредственно из кривой I расстройка получается $2\xi = 31,6\%$. Однако здесь имеет место явно выраженное затягивание — спадание амплитуды в сторону высоких частот. Исправленная ширина полосы = $26,3\%$. Получается удовлетворительное согласие с расчетом. Кривая II непосредственно дает расстройку $22,6\%$. Здесь расхождение с расчетом получается значительное. Но в этом случае совершенно не учтен фактор затягивания, который в этом режиме, несомненно, имеет место.

Наконец на рис. 14 мы имеем уже значительное расхождение. Здесь мы имеем два фактора, влияющие на ошибку: 1) под влиянием нагрузки мотор 3-фазного тока снижал свою скорость вращения на $7,6\%$, 2) в этом случае получалась большая расстройка за счет затягивания. Поправка на мотор нами учтена, что касается второй поправки, то ее без специальных измерений (сложных) невозможно определить.

Относительно всех трех случаев можно сказать следующее.

Расстройка, полученная опытным путем, всегда будет больше вычисленной, так как ф-ла (7) не учитывает совершенно затягивания.

Мы уже сказали, что нами получены два стационарных режима, отличающиеся тем, что один обусловлен нелинейностью самого статора (кривая рис. 14), другой получен с помощью особого дросселя, включенного последовательно в колебательный контур (кривая рис. 15). В обоих случаях можно получить при соответствующей расстройке очень малые величины стационарной амплитуды. Амплитуда возрастает с изменением расстройки в определенном направлении и почти скачками падает до нуля при дальнейшей расстройке. Следует при этом отметить, что в случае регулирования амплитуды с помощью дросселя с подмагничиванием, амплитуда растет с увели-

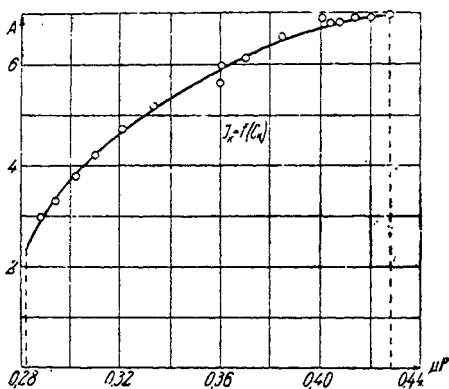


Рис. 14. Зависимость стационарной амплитуды тока (I) от расстройки (ξ).

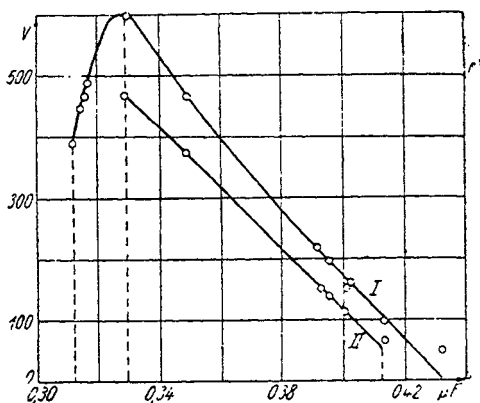


Рис. 15. Зависимость стационарной амплитуды напряжения (V) от расстройки контура (ξ).

чением собственной частоты системы. Задавая величину начального подмагничивания, можно установить любую стационарную амплитуду. На кривых рис. 16 и 17 показана зависимость тока и напряжения колебательного контура в зависимости от тока подмагничивания. Кривая рис. 16 снята при меньшей частоте, чем кривая рис. 17. При одних и тех же токах подмагничивания кривая рис. 17 лежит выше, так как она соответствует большей собственной частоте контура. Этим и объясняется различие рис. 12 и 13, рис. 13 соответствует режиму, когда в контур включен дроссель.

Заметим, что и теория [ф-лы (12)] дает два аналогичных режима, которые определяются зависимостью магнитного потока от тока ($\gamma < 0$ или $\gamma > 0$).

В заключение заметим следующее. Как было указано, существенную роль в процессе установления стационарной амплитуды при введении в систему дросселя с подмагничиванием играет нелинейная зависимость магнитного потока от тока в нем. Чтобы составить себе некоторое представление о количественной стороне явления, нами измерены были зависимости самоиндукции дросселя и потерь в нем от тока подмагничивания, которые даны на рис. 18.

$$\begin{aligned} \text{I} \quad & r_k = f(Ck) \\ & \vartheta_I = 0,414 \quad i_{\text{пр}} = 40 \text{ mA} \\ \text{II} \quad & r_k = f(Ck) \\ & \vartheta_{II} = 0,47. \end{aligned}$$

Таблица 5

H_0	H	ΔR Ω	ΔL $\times 10^{-4}$ генри	ΔR %	$\frac{\Delta L}{L_0}$ %
40n	5,6n	0,4	1,0	1,0	0,15
60n	18,2n	0,6	4,2	1,2	0,7
80n	37,8n	1,7	7,5	3,4	1,25

Эти кривые позволяют определить величину изменения средних величин самоиндукции (ΔL) и затухания (ΔR) в системе при различных амплитудах (H) параметрических колебаний и различных значениях

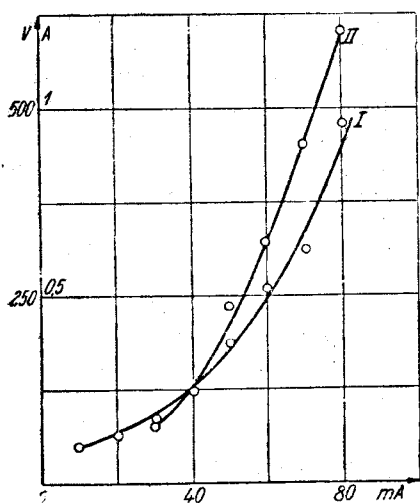


Рис. 16. Зависимость величины стационарной амплитуды тока (i) и напряжения (v) от подмагничивающего тока дросселя (I)

I $v = f_1(i)$,
 II $I = f_1(i)$;
 $C_{\text{конт}} = 0,375 \mu\text{F}$.

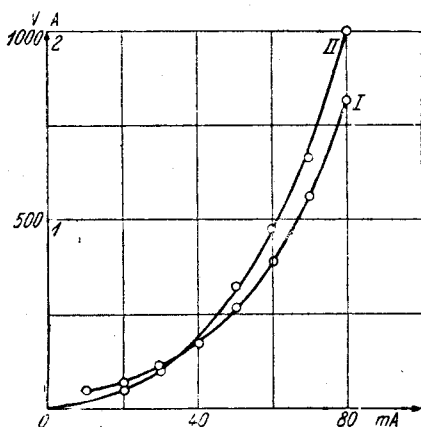


Рис. 17. Зависимость величины стационарной амплитуды (тока I и напряжения v) от подмагничивающего тока (i).

I $v = f_1(i)$,
 II $I = f_2(i)$;
 $C_{\text{конт}} = 0,32 \mu\text{F}$.

подмагничивающего тока (H_0). Как видно из табл. 5, величины $\frac{\Delta L}{L_0}$ и $\frac{\Delta R}{R_0}$ практически порядка 1—2% и меньше. Таким образом средние значения самоиндукции (а следовательно и средняя „собственная“ частота) и затухания, соответствующие стационарным амплитудам колебаний, весьма мало отличаются от начальных значений этих величин (при бесконечно-малых значениях амплитуды). Отсюда с неизбежностью вытекает, что нельзя физически объяснить процесс установления стационарной амплитуды постепенным умень-

шением инкремента нарастания до нуля, вследствие изменения частоты и затухания, вызванного нелинейными зависимостями в системе.

Как показывает теория, этот процесс связан с возникновением в системе, вследствие наличия нелинейностей, реакций, усиливающих по мере возрастания амплитуды и стремящихся скомпенсировать действие модуляции параметра.

Анализ колебаний

Мы до сих пор рассматривали колебательный процесс, получающийся в результате гетеропараметрического возбуждения, как представленный одной гармоникой, даваемой „нулевым“ решением дифференциального уравнения проблемы. При малых глубинах модуляции параметра (10 — 15%) это решение, как показывает опыт, практически, действительно передает с достаточным приближением весь процесс. Кроме основной гармоники частоты, половинной по сравнению с частотой модуляции, другие гармоники практически отсутствуют. При больших глубинах модуляции, однако, наряду с основной, согласно теории, должны играть роль и более высокие гармоники. Для того чтобы отдать себе отчет в составе и интенсивности этих гармоник, а также составить себе некоторое представление о факторах, влияющих на появление тех или иных гармоник, был снят ряд осциллограмм. Анализ этих осциллограмм, две из которых представлены в качестве примера на рис. 19 и 20, показывает,

что при глубине модуляции около 35% уже при сравнительно малых токах в контуре кривая тока имеет весьма сложный характер. Осциллограмма рис. 19 снята при токе в контуре в 4 А, причем стационарная амплитуда регулировалась изменением нагрузки в виде ламп накаливания.

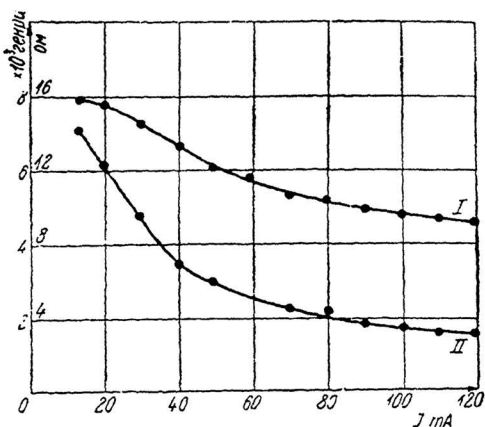


Рис. 18. Зависимость самоиндукции (L) и сопротивления (R) дросселя от подмагничивающего тока (I).

- I $L_a = f_1(I)$
- II $R_x = f_2(I)$

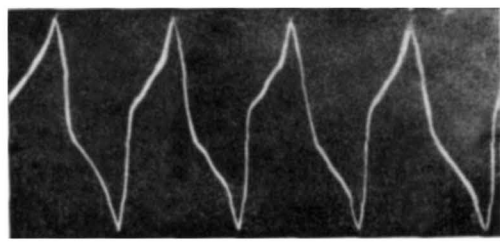


Рис. 19. Осциллограмма тока при $i = 4$ ампер.

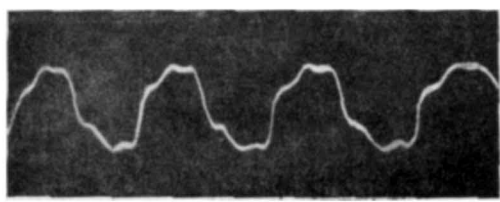


Рис. 20. Осциллограмма тока при $i = 8$ ампер.

Разлагая эту кривую в ряд Фурье, мы нашли следующее выражение для i :

$$i = \sin \omega t + 0,387 \sin(3 \omega t + 9^\circ,5) + 0,209 \sin(5 \omega t + 142^\circ) + \\ + 0,00072 \sin(7 \omega t + 324^\circ,5) + 0,016 \sin(9 \omega t + 146^\circ,4) + \\ + 0,00065 \sin(11 \omega t + 316^\circ,9).$$

Здесь интересно отметить отсутствие четных гармоник.

Разложение осциллограммы рис. 20, снятой при токе в контуре в 8 А, дает для i :

$$i = \sin(\omega t + 81^\circ) + 0,121 \sin(3 \omega t - 17^\circ) + 0,165 \sin(5 \omega t - 13^\circ) + \\ + 0,041 \sin(7 \omega t + 38^\circ) + 0,012 \sin(9 \omega t + 44^\circ) + 0,0053 \sin(11 \omega t - 63^\circ).$$

Мы видим, что в этом случае изменились относительные интенсивности нечетных гармоник.

Более детальное обследование этого вопроса, как экспериментальное, так и теоретическое, будет дано в другом месте.

Работа эта относится к циклу работ, ведущихся под общим руководством акад. Л. И. Мандельштама и проф. Н. Д. Папалекси, и была произведена в течение последних двух лет в ЛЭФИ в лаборатории нелинейных систем, руководимой проф. Н. Д. Папалекси, которому считаю своим долгом выразить глубокую благодарность за ценные указания по работе.

Ленинградский Электрофизический ин-т
Июль 1933 г.

Поступило в Редакцию
22 августа 1933 г.

UEBER DIE ERREGUNG VON SCHWINGUNGEN DURCH PARAMETERÄNDERUNG (HETEROPARAMETRISCHE ERREGUNG)

von W. A. Lazarew

Die Arbeit enthält eine experimentelle Untersuchung der Bedingungen, welche sowohl für die Anfachung von Schwingungen in einem elektrischen Schwingungskreis durch mechanisch bewirkte periodische Aenderung der Selbstinduktion, wie auch für das Bestehen derselben massgebend sind. Dabei wird ein nach dem von L. Mandelstam und N. Papalexi angegebenen Prinzip konstruierter Wechselstromgenerator beschrieben und untersucht. Die Resultate der Versuche sowohl qualitativ, wie quantitativ, stehen im Einklang mit der von den oben genannten Autoren entwickelten Theorie.

Литература

1. Melde, Pogg. Annalen, Bd. 109, 5, 192, (1895), Bd. 111, 573 (1860).
2. Winter-Günter. Zs. für Hochfr. Bd. 37, 172, 1931.
3. I. Watannale, T. Saito, Kaito. Journ. of the Inst. of El. Eng. of Japan, № 536, v. 53, p. 21, 1933.
4. Л. И. Мандельштам и Н. Д. Папалекси. Ж. Т. Ф. III, вып. 7, стр. 1141, 1933.